



# KOHERENTNÍ STRUKTURY

## Kinematika proudění

Rozhodující je **deformace** částic tekutiny

$$w_i(x_j + dx_j, t) = w_i(x_j, t) + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx_j$$

tenzor rychlosti deformace:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) = s_{ij} + r_{ij}$$

$s_{ij}$  symetrický tenzor rychlosti deformace;

$r_{ij}$  antisymetrický tenzor místní rotace částice jako tuhého tělesa.

Fundamentální věta kinematiky

### 1. Helmholtzova věta

$$w_i(x_j + dx_j, t) = w_i(x_j, t) + s_{ij} dx_j + r_{ij} dx_j$$

Každý pohyb částice lze rozložit na translaci, deformaci a rotaci.

**Vířivost** (souvisí s rotací):

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial w_k}{\partial x_j} = \text{rot } \vec{w} = \nabla \times \vec{w}$$

- kinematická *vlastnost* proudící tekutiny;
- charakterizuje *způsob* deformace částice;
- dána lokální *nerovnoměrností* proudového pole, je její mírou;
- je *prostorová*;
- pole vířivosti, vírové čáry, vírové trubice;
- je vázána na určitou částici tekutiny;

rotace N-S rovnice:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w} \nabla) \vec{w} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \vec{w} \cdot \text{rot } \vec{w} + \text{grad} \left( \frac{1}{2} w^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{w} + \frac{1}{3} \nu \nabla^2 (\nabla \vec{w})$$

pro vnější síly konzervativní, nestlačitelnou tekutinu dostáváme:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{w} \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \nabla) \vec{w} = \nu \Delta \vec{\omega}$$

### Helmholtzova rovnice

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS$$

Pro *nestlačitelnou, barotropní, nevazkou* tekutinu:



$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

Kelvinova věta: byl-li pohyb v určitém okamžiku nevířivý, zůstane jím nadále.

Pro vírovou trubici o průřezu  $S$ :

$$\frac{d}{dt} \oint_S \vec{\omega} d\vec{S} = 0$$

**2. Helmholtzova věta:** tok vírovou trubicí je konst.

$\Gamma$  je intenzitou vírové trubice,  
vírové trubice (nebo vlákna) se pohybují jako materiálové plochy s tekutinou

**3. Helmholtzova věta.**



## Dynamika vírových struktur

Biot-Savart

$$\vec{w} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{1}{r^3} d\vec{r} \times \vec{r}, \quad \Gamma = \oint_S \vec{\omega} d\vec{S}$$

Ideální vír

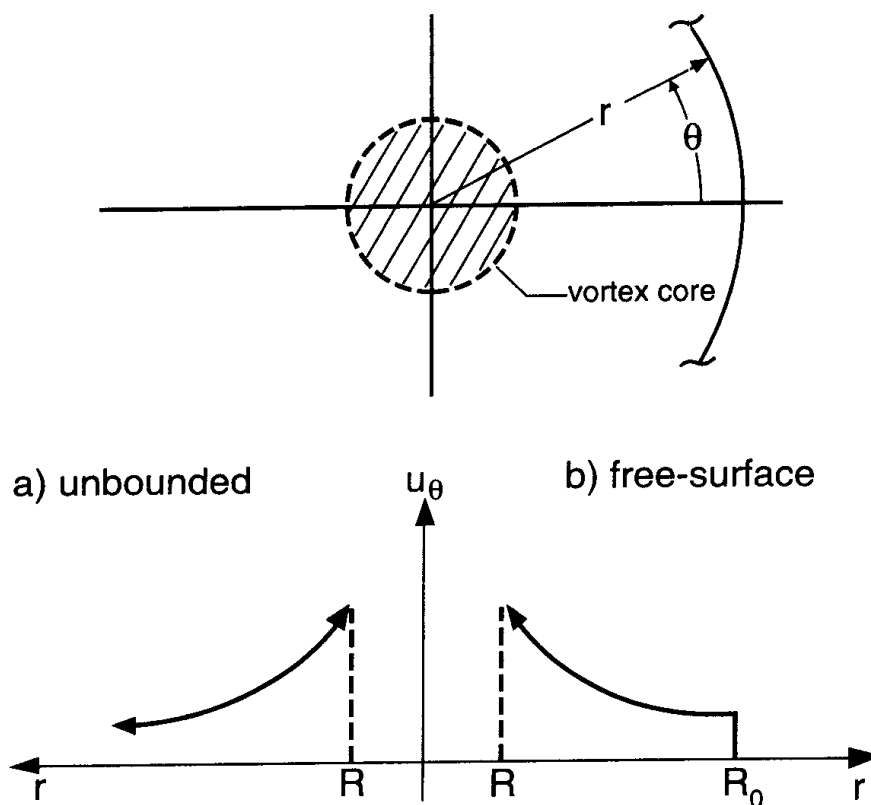


Figure 16.4.1 Axisymmetric vortex flow. a) Unbounded and b) Bounded by a free surface.

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \text{ pro } r > R$$

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} = \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} - \frac{\Gamma}{2\pi r^2} = 0$$

Vírové vlákno

- 2D

$$\vec{w} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right)$$



$$\bar{w} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

### Burgersův vír

- 3D
- difuze vířivosti
- vazká difuze
- protažení
- koncentrace vířivosti

$$u = -Ar, \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - e^{\left(\frac{r}{2\delta}\right)^2} \right], \quad w = 2Az$$

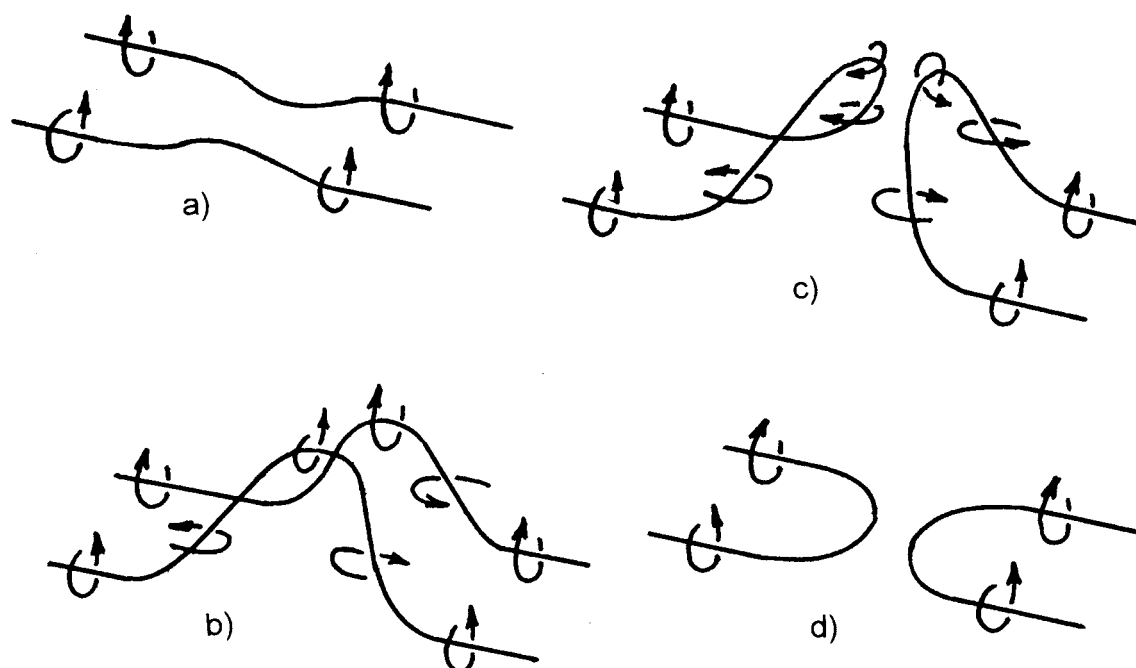


## Rozměry vírových struktur

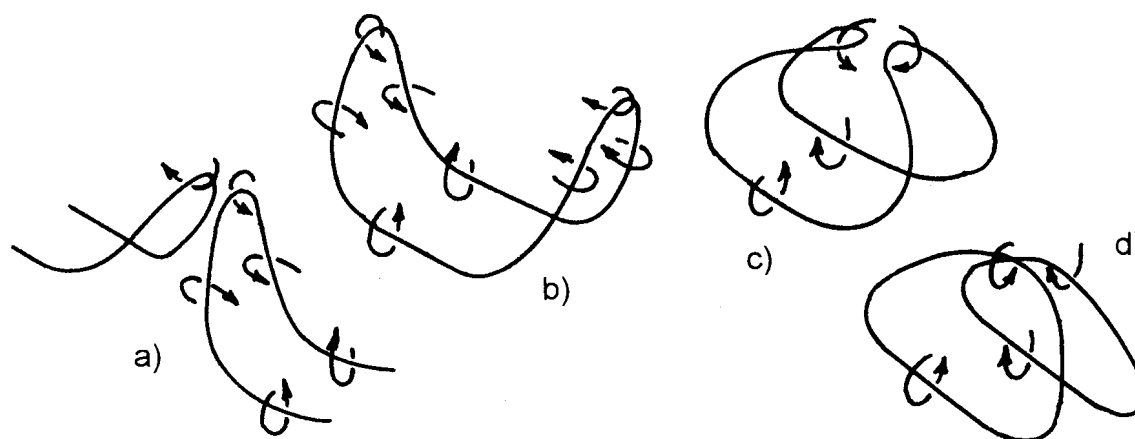
| <i>průměr víru [<math>10^n</math> m]</i> | <i>druh víru</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>n</i>                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| -10                                      | kvantované víry v tekutém heliu                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| -3                                       | turbulentní víry                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| -2 až -1                                 | <i>v přírodě</i> : víry generované letícím hmyzem, popř. padajícími listy,<br><i>v technice</i> : většina tzv. sekundárního proudění v kanálech, lopatkových mřížích, koutové víry, čelní víry,                                                                                                                            |
| 0 až 1                                   | menší víry v pobřežních vodách, řekách, víry vznikající při obtékání objektů (např. budov) v atmosférické mezní vrstvě, popř. při pohybu objektů (např. lodi, letadel, vlaků),<br>přízemní víry termického původu, víry vznikající při nasávání vzduch proudovými motory při startu, víry v sacích otvorech vodních turbin |
| 2 až 3                                   | geofyzikální víry (např. při vulkanických erupcích), víry v mracích a termických prouděch,<br>víry v pobřežních mořských vodách,                                                                                                                                                                                           |
| 5 až 6                                   | hurikány ( $a \sim 2 \cdot 10^6$ ), víry v Golském proudu, cirkulace v atmosféře a v mořích,<br>konvektivní cirkulační proudy uvnitř Země                                                                                                                                                                                  |
| 6 až 8                                   | planetární atmosféra<br>velké červené skvrny na Jupiteru, sluneční skvrny                                                                                                                                                                                                                                                  |
| podle rozměru hvězdy                     | rotace uvnitř hvězd                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| světelné roky                            | galaxie                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |



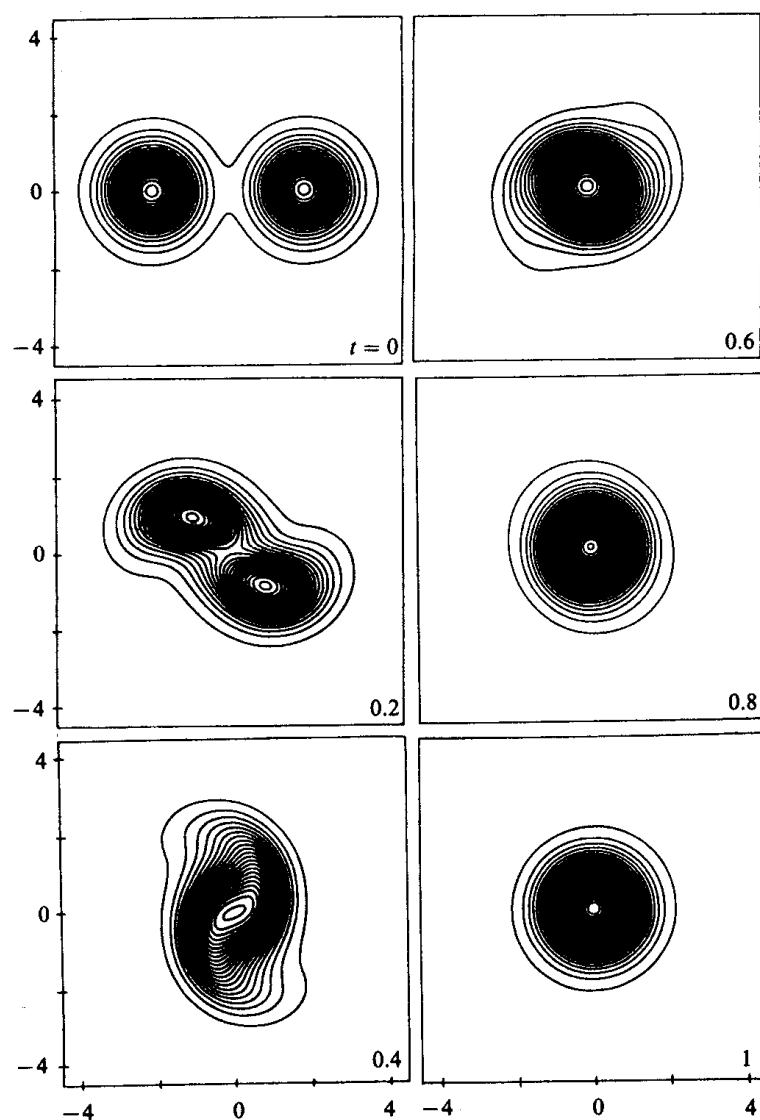
Skutečnost: vliv VAZKOSTI → neplatí Helmholtzovy věty → interakce vírových vláken JE MOŽNÁ:



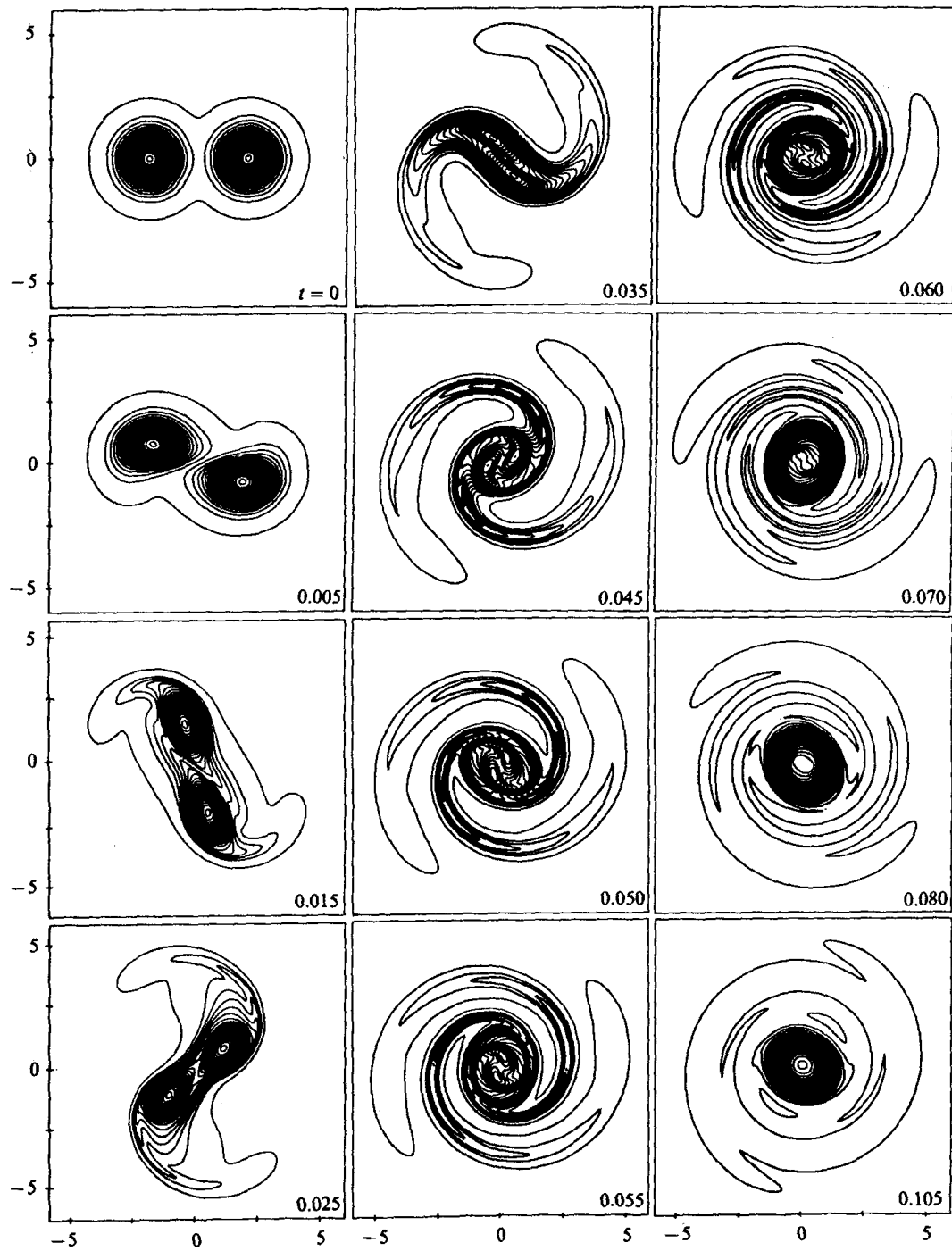
**Obr. 2** Interakce dvou paralelních vírových vláken s opačným smyslem rotace (spojování, přemostění)



**Obr 3** Interakce dvou paralelních vírových vláken s opačným smyslem rotace (opětné uzavření vláken)



**Obr. 6a** Sdružování vírů se stejným smyslem rotace  
Na obrázku jsou vyneseny čáry konstantní vířivosti v různých časových intervalech



vyšší  $Re$  - vliv vazkosti





## Vírové kroužky

### Generátor

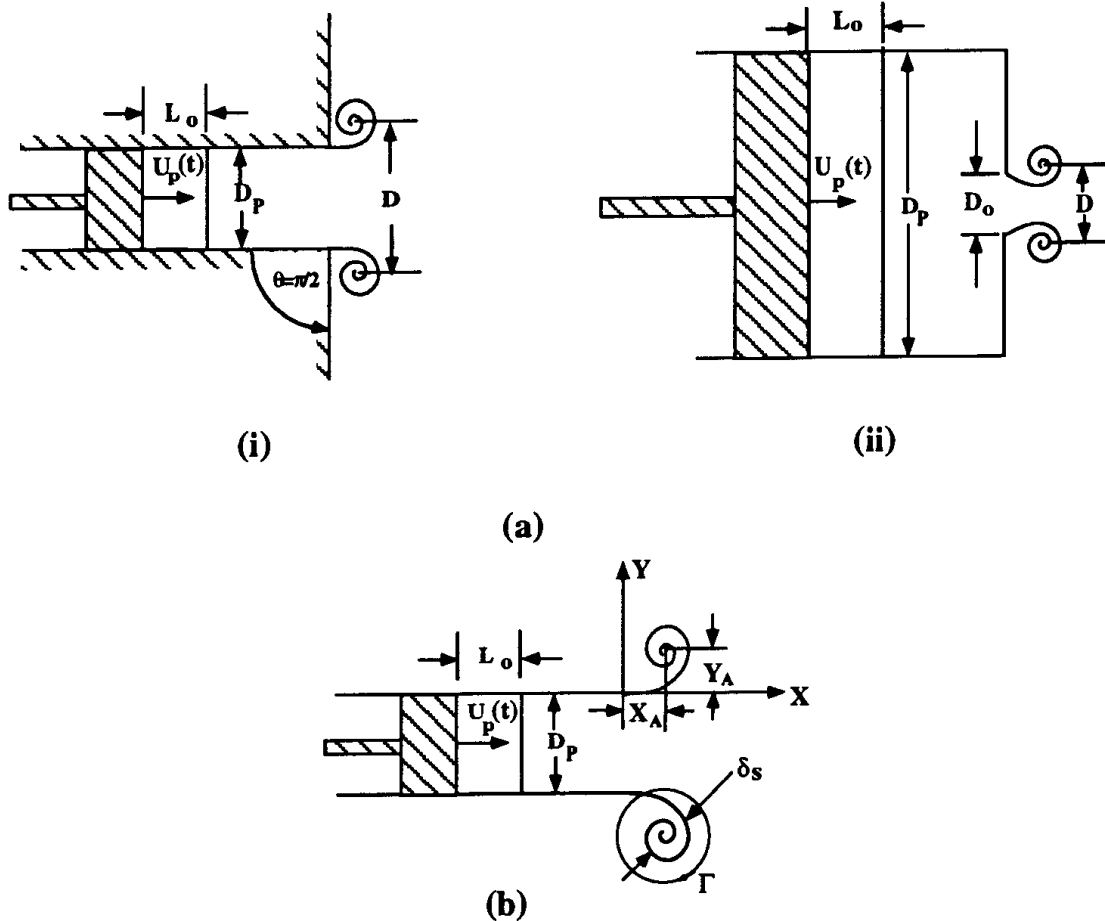


Figure 4.4.2 Some common geometries of vortex ring generators. (a) Orifice opening. (b) Tube openings (here  $D_p = D_o$ ) (i)  $\theta = \pi/2$  and (ii)  $\theta = 0$ .

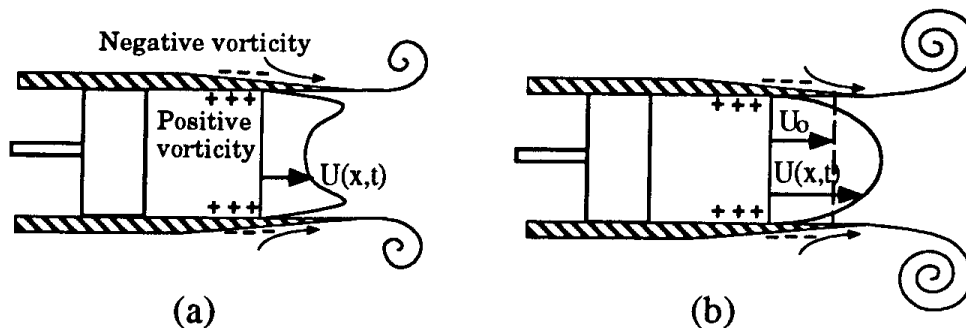


Figure 4.4.6 Velocity profile at the exit of the nozzle. (a) at the beginning of the piston motion. (b) at a later time.

## simulace vývoje víru

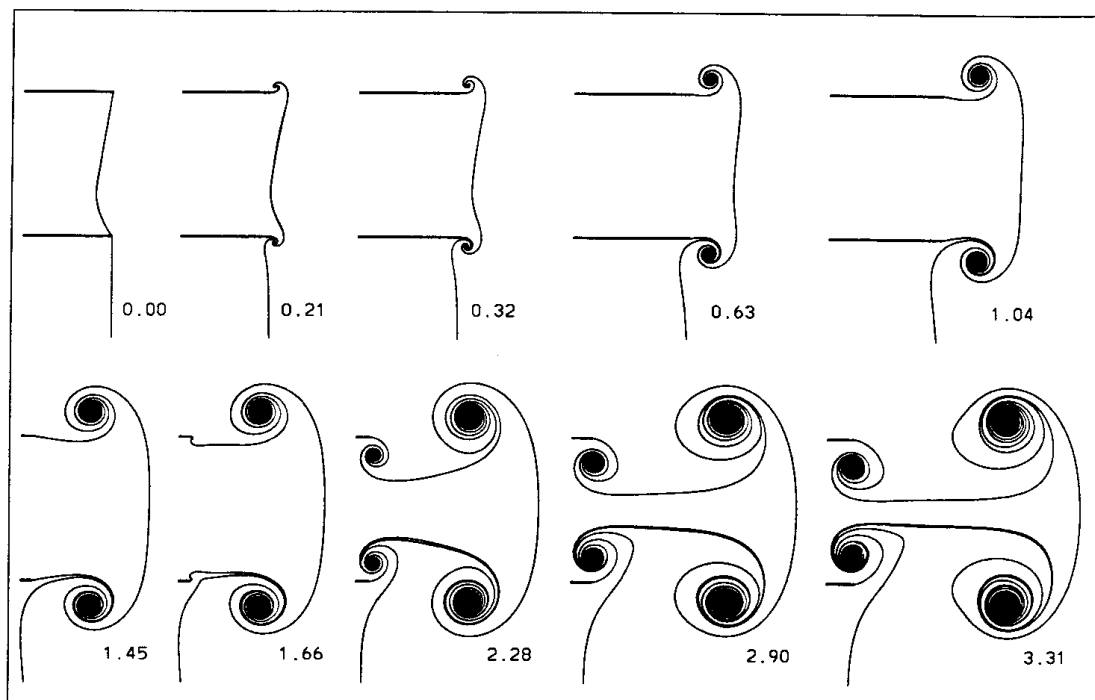
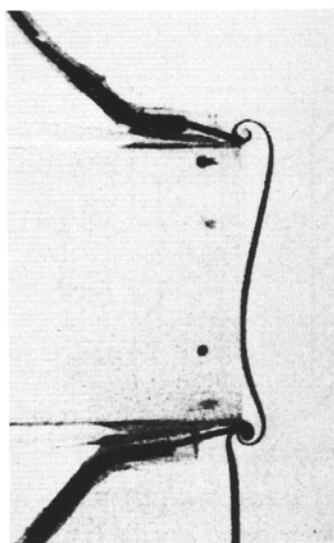


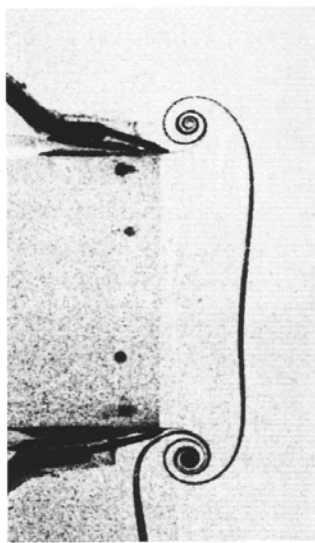
Figure 4.4.4 Computed behaviour of inviscid cylindrical vortex sheet formed at a tube opening (reproduced with permission from Nitsche and Krasny (1994)).



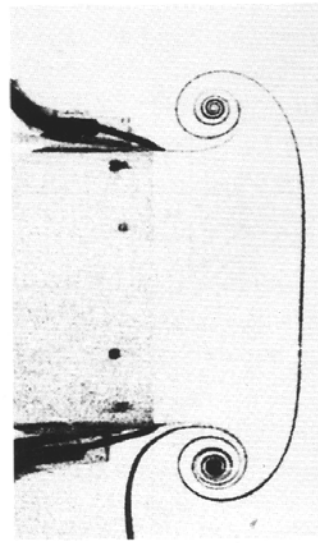
visualisace



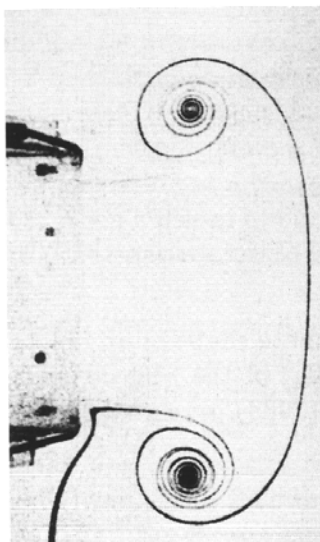
(a)  $t=0.21s$



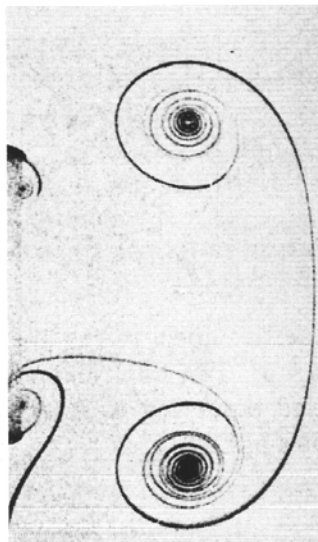
(b)  $t=0.63s$



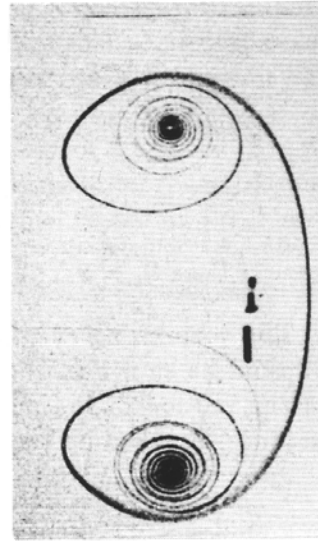
(c)  $t=1.04s$



(d)  $t=1.66s$



(e)  $t=2.28s$



(f)  $t=3.31s$

Figure 4.4.3 Different stages in the formation of a vortex ring at a tube (reproduced with permission from Didden (1979)).

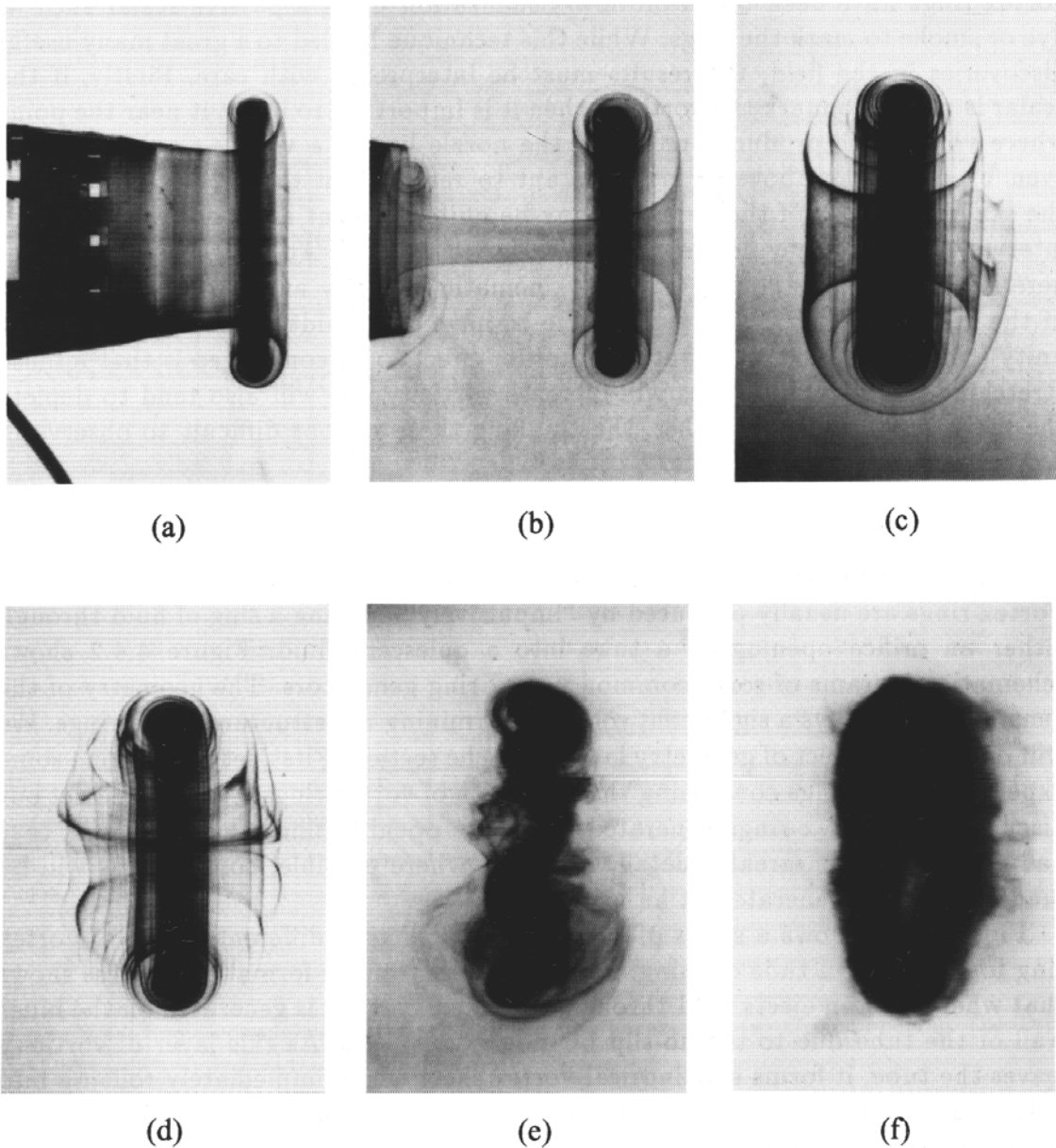


Figure 4.4.1 Sequence of photographs showing the formation of a laminar vortex ring and its subsequent development. The Reynolds number is about 1500. Note the formation of an azimuthal instability and the resultant formation of a turbulent vortex ring in (e) and (f) respectively (reproduced with permission from Didden (1977)).

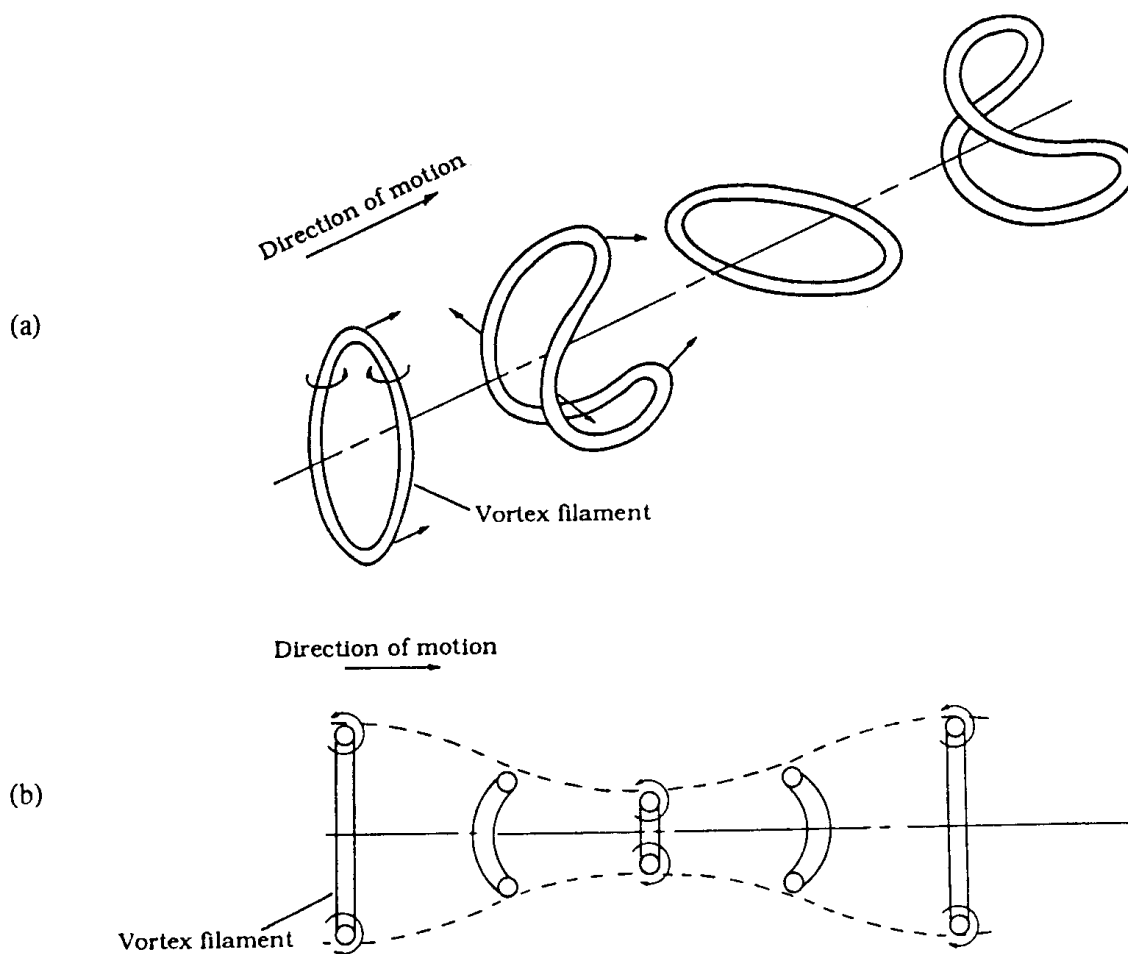
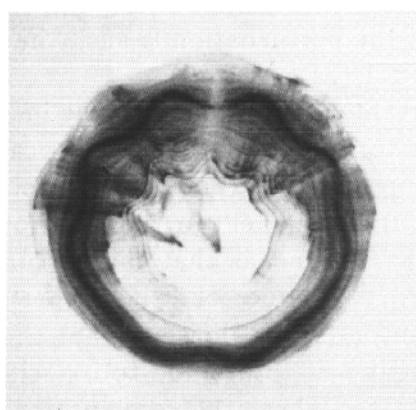
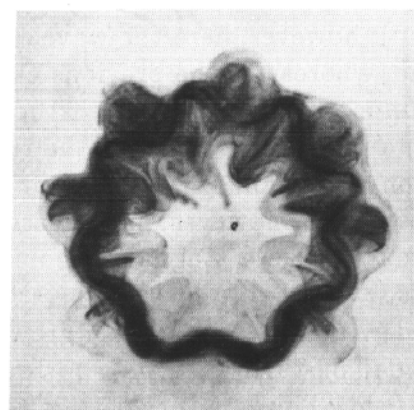


Figure 4.4.10 The motion of an elliptic vortex ring. The sketch (a) shows the deformation of the elliptic vortex filament. Straight arrows indicate the direction of motion of different parts of the ellipse. (b) shows the oscillation of the vortex filament in side view.



(a)



(b)

Figure 4.4.8 Azimuthal waves on a laminar vortex ring. (a) shows the waves at an early stage of growth and (b) shows the waves at some later time (reproduced with permission from Didden (1977)).



## Interakce vírových kroužků

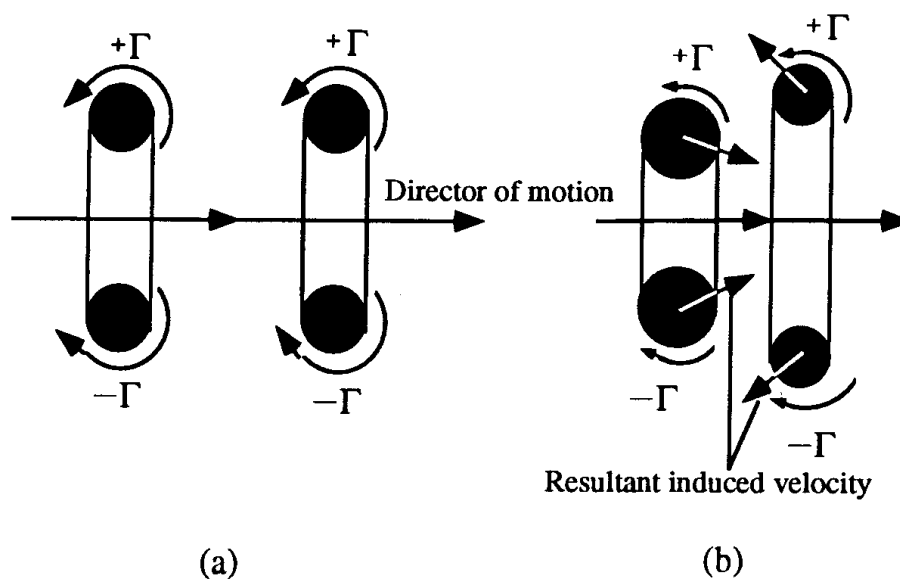


Figure 4.5.3 Schematic diagram of the leap-frogging of vortex rings. (a) shows the rings before significant interaction has occurred and (b) shows the effect of the interaction.

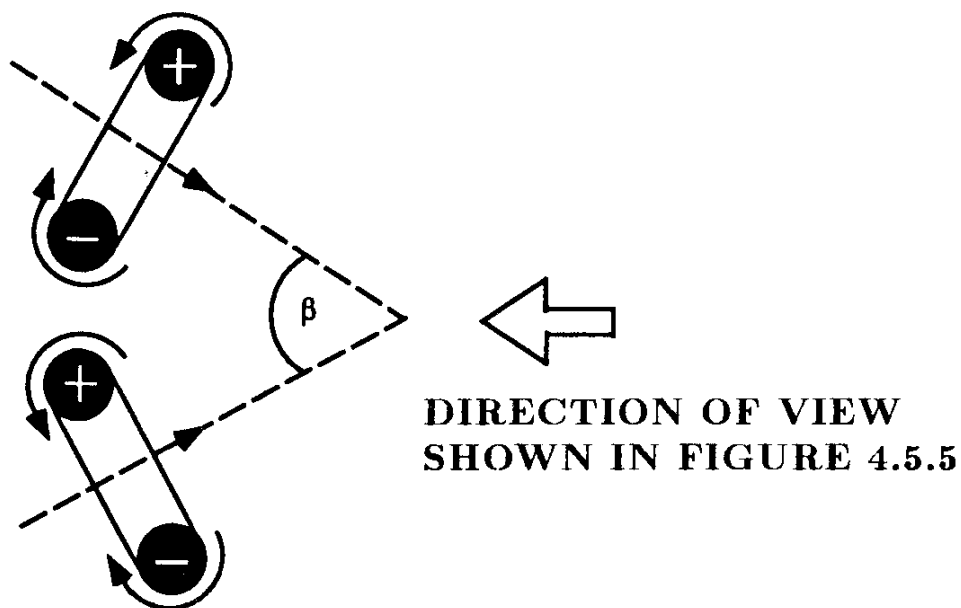


Figure 4.5.4 Schematic diagram of the collision of two rings at an angle.

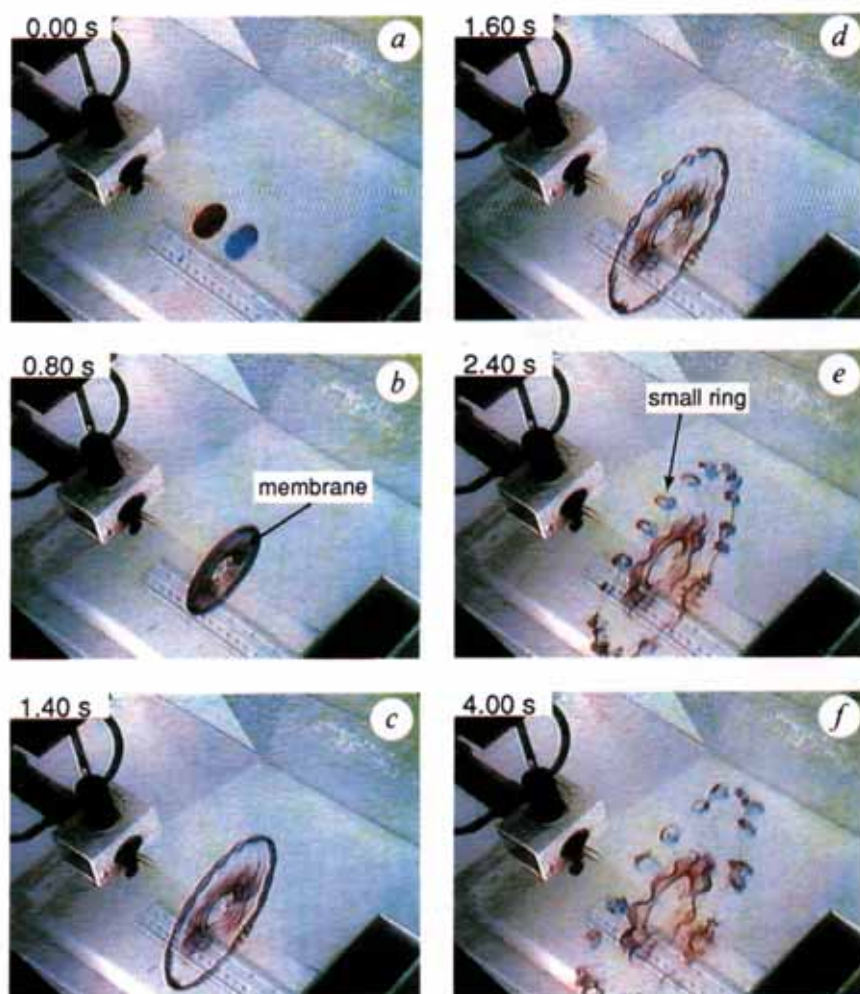


Figure 4.5.2 Head-on collision of two vortex rings (made visible using colored dyes in water)(reproduced from Lim and Nickels (1992)). Note the instability and the formation of small rings.

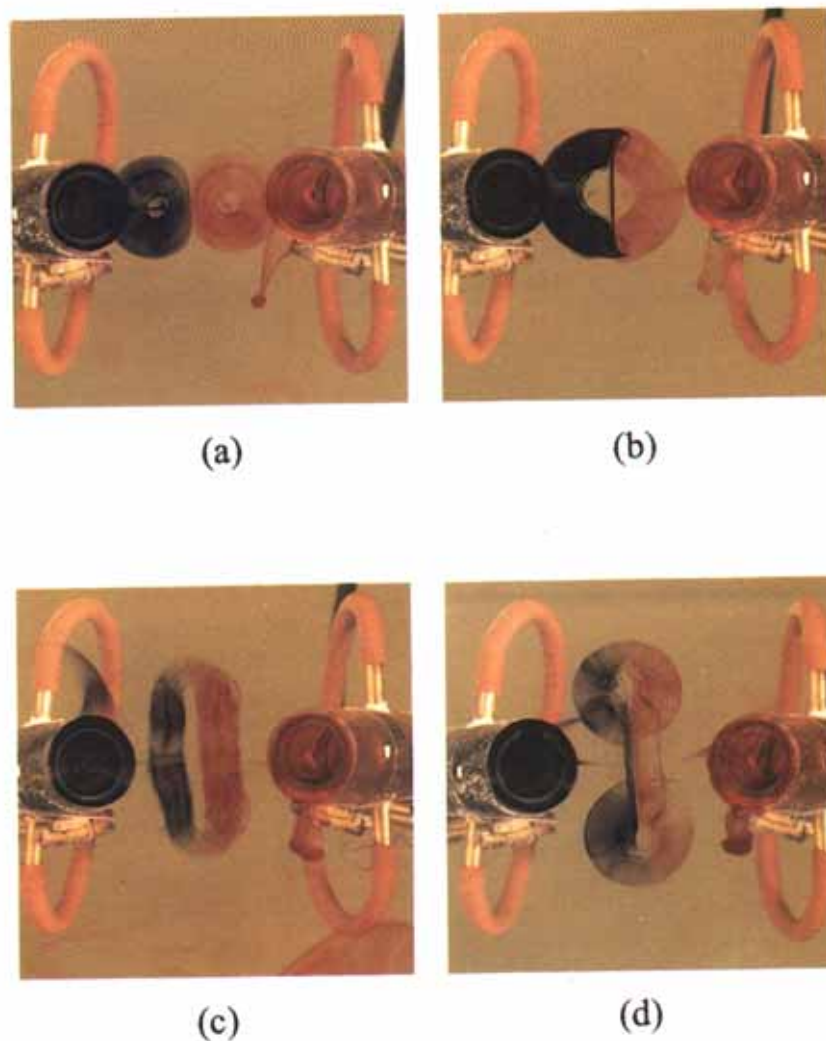
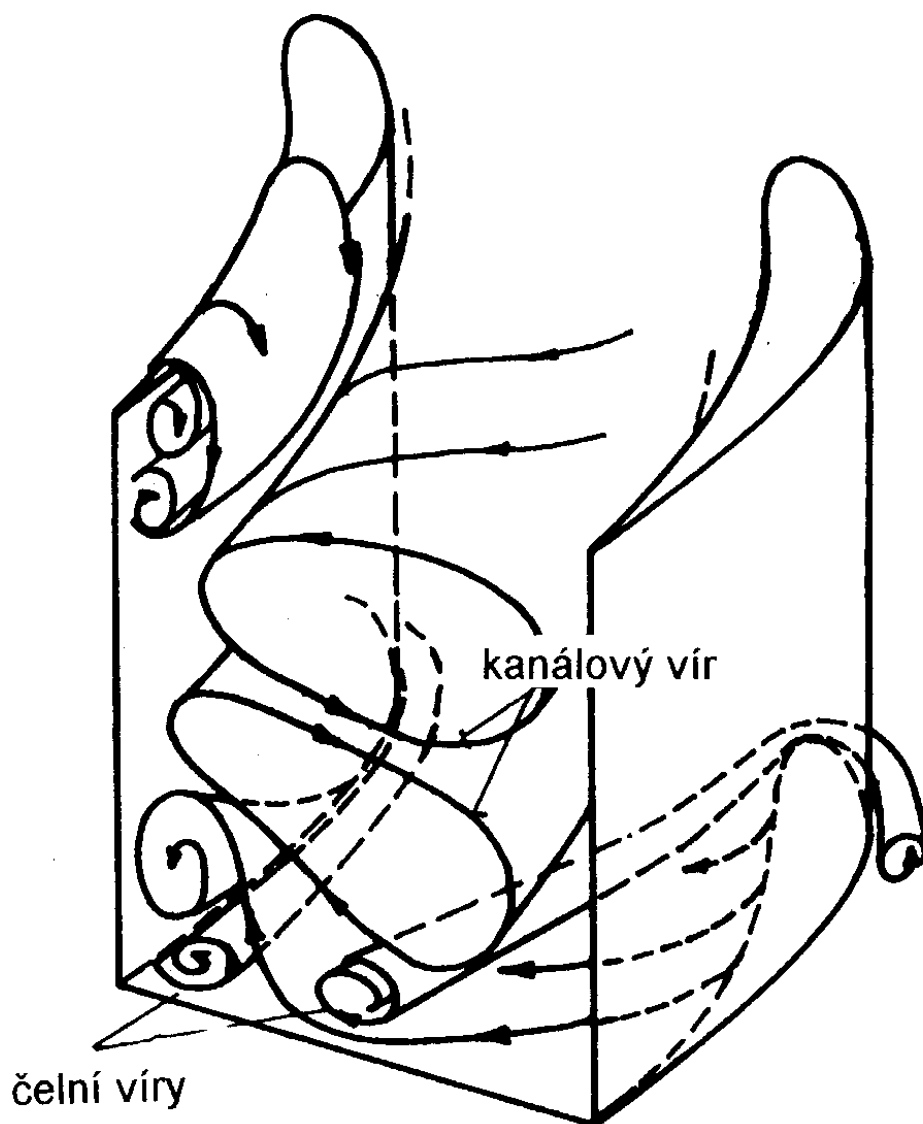


Figure 4.5.5 A series of front-view photographs showing different stages of the collision of two vortex rings at an angle. Note that each resultant ring contains material from both the original rings. The viewing direction is shown in Figure 4.5.4 (reproduced with permission from Lim (1989)).



## Praktické příklady

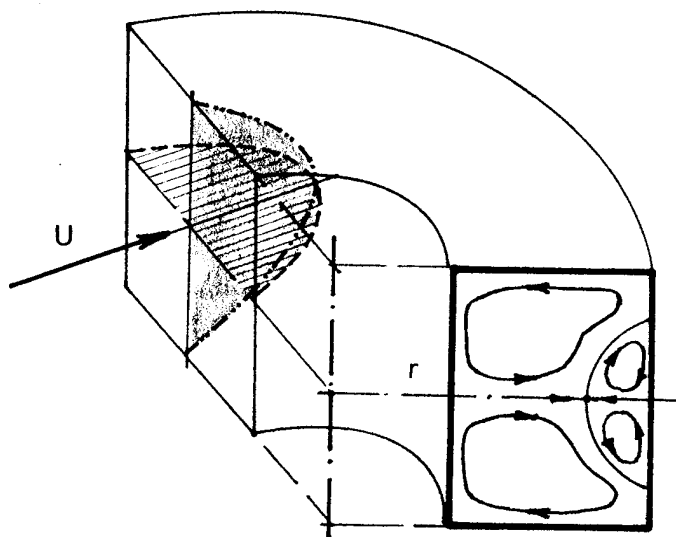
### Lopatková mříž



**Obr. 24** Zjednodušené schéma vírů v lopatkové mříži

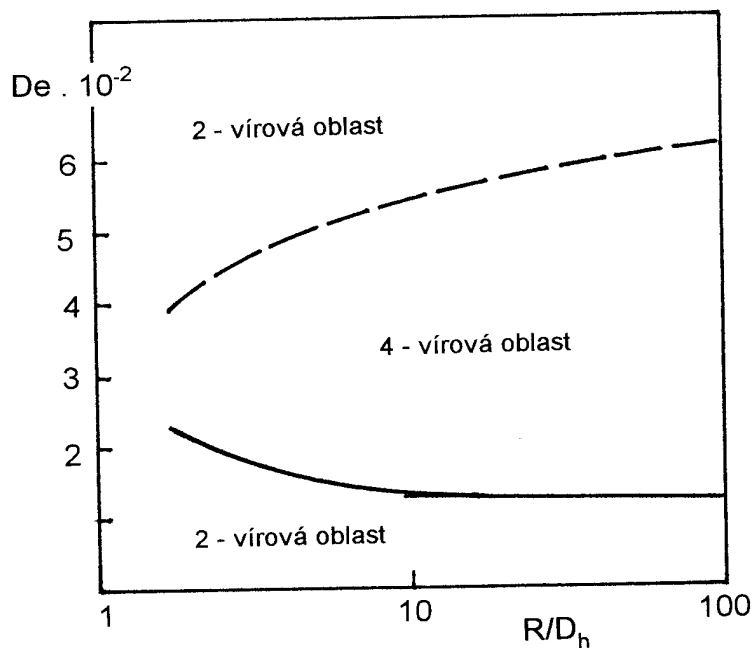


## Zakřivený kanál



**Obr. 10**

Sekundární proudění v koleně. Vznik 4-vírové struktury



**Obr.11** Hranice oblastí 2 a 4 vírů v závislosti na Deanově čísle a  $R/D_h$   
( $R$  je poloměr křivosti,  $D_h$  je hydraulický průměr).  
Sestaveno podle publikovaných dat (Škvor, 1997)



## Interakce paprsku s proudem